3.12)

α. $\lim_{x\to 3}(x^2+2x)=15$

Έστω $f(x)=x^2+2x$ με $\Delta(f)=\mathbb{R}$

Αρκεί νδο

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R}): 0<|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-15|<\varepsilon$

όπου,

$|x^2+2x-15|=|x-3||x+5|<\delta|x+5|$ ①

Δίχως να χάνουμε την γενικότητα, στην τελική επιλογή του δ θεωρούμε το δ≤1

Άρα, $|x-3|<1 \Rightarrow \underbrace{-1<x-3<1}\Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5+2<x+5<4+5 \Rightarrow \underbrace{7<x+5<9}$

Άρα, η σχέση ① θα 'ναι:

$$|x-3||x+5|<\delta|x+5|<\delta\cdot 9<\varepsilon \Rightarrow \delta<\frac{\varepsilon}{9}$$

Άρα,

$$\left.\begin{array}{l}\delta<\frac{\varepsilon}{9}\\ \delta<1\end{array}\right\}\ \delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{9}\right\}$$

Συνεπώς, $|x^2+2x-15|=|x-3||x+5|<9|x-3|<\cancel{9}\frac{\varepsilon}{\cancel{9}}$

SKAG

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

8. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x+3} = 2$

Έστω $g(x) = \sqrt{x+3}$, $\Delta(g) = [-3, +\infty)$

Αρκεί νδο

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in [-3,+\infty)) : 0<|x-1|<\delta \Rightarrow |\sqrt{x+3}-2|<\varepsilon$

Όπου,

$$|\sqrt{x+3}-2| = \frac{|x+3-4|}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{|x-1|}{\sqrt{x+3}+2} \quad (1)$$

δίχως, να κανουμε την τελική επιλογή του δ θεωρούμε το $\delta \leq 1$

$|x-1|<\delta \Rightarrow |x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<1$

$\Rightarrow 3<x+3<3+1 \Rightarrow 3<x+3<4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{x+3} < 2 \Rightarrow \sqrt{3}+2 < \sqrt{x+3}+2 < 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+2} > \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} > \frac{1}{4}$$

Άρα, στη σχέση (1) θα έχουμε ότι:

$$|x-1| \cdot \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} < \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+2} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \delta < \varepsilon(\sqrt{3}+2)$

Συνεπώς

$$\left.\begin{array}{l} \delta \leq 1 \\ \delta < \varepsilon(\sqrt{3}+2) \end{array}\right\} \delta = \min(1, \varepsilon(\sqrt{3}+2))$$

SKAG

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{1}{3}$$ (Μέσω του ε-δ ορισμού)

<u>Λύση</u>

Αρκεί, νδο $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in \Delta(f)): 0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-4}{x^3-8}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$.

Έστω, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^3-8}$, όπου $\Delta(f)=\{x\in R: x\neq 2\}$

Άρα, $\Delta(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

Τώρα,

$$\left|\frac{x^2-4}{x^3-8}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3(x^2-4)-(x^3-8)}{3\cdot(x^3-8)}\right| =$$

$$= \left|\frac{3\cancel{(x-2)}(x+2)-\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{3\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}\right| = \frac{|x^2-x-2|}{|3x^2+6x+12|} =$$

$$= \frac{1}{3|x^2+2x+4|}\cdot|x+1|\cdot|x-2| < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{|x^2+2x+4|}\cdot|x+1|\cdot\delta \quad ①$$

$$|x-2|<\delta \xRightarrow{(\delta=1)} |x-2|<1 \Rightarrow 2<x+1<4 \Rightarrow |x+1|<4$$

καθώς, $\begin{cases} 1<x<3 \Rightarrow 1<x^2<9 \\ 1<x<3 \Rightarrow 2<2x<6 \Rightarrow 6<2x+4<10 \end{cases} \xRightarrow{\oplus}$

$$\xRightarrow{\oplus} 7<x^2+2x+4<19 \Rightarrow \frac{1}{19}<\frac{1}{x^2+2x+4}<\frac{1}{7}$$

Άρα, ① $\left|\frac{x^2-4}{x^3-8}-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot 4\cdot\delta = \frac{4}{21}\delta$

Αρκεί $\delta=\frac{21}{4}\varepsilon$, Άρα, $\delta=\min\{1, \frac{21}{4}\varepsilon\}$.